

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LE MODÈLE DE HESTON ET L'ESTIMATION DE LA VOLATILITÉ DE
L'INDICE S&P500

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN ADMINISTRATION DES AFFAIRES
PROFIL RECHERCHE

PAR
GEORGES AZZI

MAI 2008

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Ce mémoire a été fait sous la supervision du Professeur Raymond Théoret à qui je suis reconnaissant de m'avoir donné l'opportunité de faire cette recherche. Je le remercie également pour son aide et sa patience pour toute la durée de ce travail. Je voudrais aussi remercier ma famille pour son soutien et ses encouragements durant la rédaction de ce mémoire. Enfin, je voudrais remercier le département de finance, le programme MBA recherche et l'Université de Québec à Montréal de m'avoir permis de mener à bien cette recherche.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	v
LISTE DES TABLEAUX	vi
RÉSUMÉ	vii
INTRODUCTION	1
REVUE DE LITTÉRATURE	2
CHAPITRE I	
LES MODÈLES D'ÉVALUATION DE LA VOLATILITÉ	3
1.1 Modèle de GARCH	3
1.1.1 Le modèle GARCH (1,1)	3
1.1.2 L'implémentation du modèle GARCH	4
1.1.3 Prévisions de la volatilité à long terme et de la structure à terme	5
1.2 Modèle de la volatilité implicite	8
1.2.1 La méthode Newton-Raphson	9
1.2.2 La méthode de bisection	10
1.3 Calcul de la volatilité implicite non basé sur des modèles	11
1.3.1 Calcul de volatilité à terme non basé sur des modèles	14
1.4 Modèle de volatilité stochastique avec retour à la moyenne	15
1.5 Modèle du VIX	16
MÉTHODOLOGIE	20
CHAPITRE II	
LE MODÈLE DE HESTON	21
2.1 Le modèle	21
2.1.1 L'approche d'évaluation complète	24
2.1.2 L'approche de résolution analytique	25
2.2 Adaptation du modèle	26

2.3	Estimation des paramètres	27
2.3.1	La méthode \$RMSE	27
2.3.2	La méthode % RMSE	28
2.3.3	La méthode ivRMSE	28
2.4	Les données utilisées lors des calculs	29
CHAPITRE III		
	ESTIMATION DE LA VOLATILITÉ DU S&P 500	32
3.1	Les équations	32
3.2	Résultats	33
	VALIDITÉ DU MODÈLE	38
CHAPITRE IV		
	LA VOLATILITÉ RÉALISÉE vs HESTON	39
4.1	La volatilité réalisée du S&P 500	39
4.2	Comparaison avec le modèle de Heston	42
4.3	Validation et application du modèle	44
	CONCLUSION	45
	APPENDICES	46
APPENDICE A		
	ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE HESTON	47
APPENDICE B		
	SIMULATION DE LA TRAJECTOIRE DE LA VOLATILITÉ DE HESTON..	53
APPENDICE C		
	LA VOLATILITÉ RÉALISÉE DE L'INDICE S&P 500	57
	BIBLIOGRAPHIE	58

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
1.1	La structure à terme de la volatilité par le modèle de GARCH	7
1.2	Les valeurs de fermeture de l'indice de volatilité, VIX	17
3.1	Volatilité de l'indice S&P500 générée par le modèle de Heston	33
3.2	La volatilité du S&P500 pour l'année 2000	34
3.3	La volatilité du S&P500 pour l'année 2001	34
3.4	La volatilité du S&P500 pour l'année 2002	35
3.5	La volatilité du S&P500 pour l'année 2003	35
3.6	La volatilité du S&P500 pour l'année 2004	36
3.7	La volatilité du S&P500 pour l'année 2005	36
3.8	La volatilité du S&P500 pour l'année 2006	37
3.9	La volatilité du S&P500 pour l'année 2007	37
4.1	Volatilité réalisée annuelle du S&P500	41
4.2	Volatilité réalisée du S&P500 vs Volatilité de Heston	43
4.3	La volatilité du S&P500 pour l'année 2008	44

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
2.1	Les options sur l'indice S&P500 au 16 novembre 2007	30
2.2	Les Paramètres estimés de Heston selon les trois méthodes	31
4.1	Volatilité réalisée du S&P500	41
4.2	La différence entre la volatilité réalisée et celle de Heston	42
B.1	La volatilité annuelle de Heston	56

RÉSUMÉ

L'énorme incertitude qui règne sur les marchés financiers se traduit par de la volatilité intégrée dans les prix des options qui augmentent lorsque les investisseurs prévoient des fluctuations importantes des prix des actions. Le recours à une formule d'évaluation d'options est alors nécessaire pour extraire la volatilité anticipée des prix d'options cotés. Dans ce cas, les hypothèses jointes d'efficience informationnelle du marché des options et de validité du modèle d'évaluation d'options retenu sont impliquées. Motivés par ces faits, nous avons adapté le modèle de Heston pour générer la volatilité de l'indice boursier S&P 500 à partir des prix des options écrites sur cet indice. Puis nous avons estimé les paramètres du modèle pour reconstruire une volatilité historique et la comparer avec la volatilité réalisée. Les résultats de notre recherche montrent que la différence entre la volatilité estimée par le modèle de Heston et la volatilité réalisée est peu significative, ce qui nous a permis de valider et d'appliquer ce modèle pour prévoir la volatilité future de l'indice S&P500. Nous avons trouvé également que les résultats dépendent de la quantité des options sélectionnées et de la largeur de l'intervalle des prix d'options disponibles.

Mots clés : Volatilité, Options, S&P500, Heston, GARCH, VIX.

INTRODUCTION

L'étude de la volatilité des variables financières s'impose s'agissant de l'optimisation des stratégies et des investissements. La très grande majorité des études empiriques visant à mesurer le pouvoir prévisionnel de la volatilité utilisent des options transigées sur les marchés des produits dérivés qui ont connu une très forte expansion ces dernières années. Une grande variété d'options et de contrats à terme sont échangés quotidiennement sur des indices boursiers, des taux d'intérêt, des obligations et des devises. Les fluctuations de ces instruments financiers sont difficiles à prévoir et à appréhender car elles sont difficilement observables.

Le recours à une formule d'évaluation d'options est alors nécessaire pour extraire la volatilité anticipée des prix d'options cotés. Dans ce cas, l'estimation implique un test d'hypothèses jointes d'efficience informationnelle du marché des options et de validité du modèle d'évaluation d'options retenu.

Le modèle développé dans ce mémoire est celui de Heston (1993). Il est conçu pour estimer et prévoir les comportements de la volatilité de l'indice S&P500. La première partie de ce travail renferme une revue de la littérature sur les modèles de volatilité existant dans la littérature financière. À la deuxième partie est exposée la méthodologie retenue. Après la présentation et l'adaptation du modèle, nous essaierons de l'appliquer aux estimations et aux prévisions de la volatilité à long terme. Enfin nous étudions à la troisième partie la robustesse du modèle et sa validité en le comparant avec la méthode de la volatilité réalisée.

REVUE DE LITTÉRATURE¹

Cette partie couvre les principaux modèles d'évaluation d'options ainsi que les modèles de volatilité présents dans la littérature financière et utilisés par les spécialistes de la finance.

La plupart des modèles et des techniques employés par les analystes aujourd'hui sont basés sur un modèle développé par Fischer Black et Myron Scholes en 1973. En effet, la volatilité a été le centre d'intérêt depuis la publication de la formule de Black et Scholes dans le *Journal of Political Economy*. Les hypothèses les plus restrictives de ce modèle sont la distribution normale des rendements d'un actif sous-jacent et la volatilité constante qui ne varie ni avec le temps ni avec le prix d'exercice. En 1973, Robert Merton a levé l'hypothèse que l'action ne verse aucun dividende. En 1976, Jonathan Ingerson est allé un pas en avant et a relâché l'hypothèse de l'absence d'impôts et de coûts de transaction. En 1976, Merton a finalement supprimé la restriction ayant trait aux taux d'intérêts constants.

Les techniques modernes d'évaluation des prix d'option sont souvent considérées comme les plus complexes au plan mathématique de tous les domaines appliqués de la finance. Les analystes financiers ont atteint de nos jours le point où ils sont capables de calculer, avec une exactitude étonnante, la valeur d'une option.

¹ Notre revue de littérature s'inspire de Fabrice Douglas et Gregory Vanberg (2007), « Option Pricing Models & Volatility », et de François-Eric Racicot et Raymond Théoret (2006), « Finance computationnelle et gestion des risques ».

CHAPITRE I

LES MODÈLES D'ÉVALUATION

1.1 Le modèle GARCH

Ce modèle est très utile pour modéliser l'effet de la volatilité sur les prix des actions. Les modèles économétriques ARCH et GARCH (autoregressive conditional heteroscedasticity et generalized autoregressive conditional heteroscedasticity) permettent de modéliser le comportement de la variance conditionnelle du terme aléatoire d'une équation économétrique dans le temps. Le développement de ces modèles a constitué une révolution au chapitre de la modélisation financière des séries temporelles.

1.1.1 Le modèle GARCH (1,1)

Ce modèle GARCH(1,1) est fort prometteur pour prévoir la variance conditionnelle du prix de l'action qui entre directement dans le calcul du prix de l'option écrite sur cette action. La forme générale de ce modèle est représentée par un GARCH (p, q). Les prévisions de GARCH (p, q) pour la volatilité au temps (t +1), basées sur des valeurs observées au temps t, sont données par:

$$\sigma_{t+1}^2 = w + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t+1-j}^2 \quad (1.1)$$

σ_{t+1-j}^2 représente les estimations historiques de la variance

r_{t+1-i}^2 représente les carrés des rendements historiques

w, α_i, β_j sont des paramètres positifs

Le modèle GARCH, le plus simple et le plus utilisé, fixe p et q à 1. Le modèle GARCH(1,1) est donné par :

$$\sigma_{t+1}^2 = w + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_t^2 \quad (1.2)$$

Dans ce modèle, $\alpha + \beta$ mesurent la persistance de la volatilité.

- Si $\alpha + \beta < 1$, alors la variance suit un processus de retour à la moyenne.
- Plus $\alpha + \beta$ tend vers 1, plus la volatilité persiste.
- Plus $\alpha + \beta$ tend vers 0, plus la volatilité converge rapidement vers la variance à long terme.

Les paramètres w, α, β sont utilisés pour définir le modèle GARCH(1,1) et pour illustrer l'efficacité du modèle en captant l'effet de grappe de la volatilité (volatility clustering) même en choisissant des valeurs arbitraires de ces paramètres.

1.1.2 L'implémentation du modèle de GARCH

Les paramètres du modèle doivent être estimés à partir des rendements historiques de l'actif soit l'indice S&P500 dans notre cas. La technique utilisée pour l'estimation de ces paramètres est celle du maximum de vraisemblance « maximum likelihood estimation ». Les rendements sont supposés distribués normalement avec une moyenne nulle et une variance σ_t^2 . Ceci implique que:

$$E_{t-1}[r_t] = 0 \quad (1.3)$$

Et
$$E_{t-1}[r_t^2] = \sigma_t^2 \quad (1.4)$$

La fonction de densité de probabilité pour r_t est donnée par :

$$f(r_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(\frac{-r_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (1.5)$$

En supposant que les rendements r_t sont indépendants, la densité de probabilité jointe de r_1, \dots, r_n peut être écrite sous la forme :

$$L(r_1, \dots, r_n) = \prod_{t=1}^n f(r_t) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(\frac{-r_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (1.6)$$

Les valeurs de w , α et β qui maximisent la formule (1.6) sont les estimations de maximum de vraisemblance (maximum likelihood estimates, MLEs) des paramètres.

1.1.3 Prévisions de la volatilité à long terme et de la structure à terme²

La variance à long terme dans le modèle GARCH(1,1) est donnée par :

$$\sigma^2 = \frac{w}{1 - \alpha - \beta} \quad (1.7)$$

D'où l'équation de la variance (1.2) se réduit à :

$$\sigma_t^2 = w + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 = \sigma^2(1 - \alpha - \beta) + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (1.8)$$

Pour le $n^{\text{ième}}$ jour, la variance donnée par le modèle GARCH sera :

² Voir à ce sujet Rouah Douglas F., et G. Vanberg, (2007), "Option Pricing Models & Volatility Using Excel-VBA", chapitre 6 pp.172-173.

$$\begin{aligned} \text{Ou } \sigma_{t+n}^2 &= \sigma^2(1 - \alpha - \beta) + \alpha r_{t+n-1}^2 + \beta \sigma_{t+n-1}^2 \\ \sigma_{t+n}^2 - \sigma^2 &= \alpha(r_{t+n-1}^2 - \sigma^2) + \beta(\sigma_{t+n-1}^2 - \sigma^2) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Au temps t , la valeur espérée de r_{t+n-1}^2 est :

$$E_t[r_{t+n-1}^2] = \sigma_{t+n-1}^2 \quad (1.10)$$

D'où, sachant que $E_t[\sigma_t^2] = \sigma_t^2$, on aura :

$$\begin{aligned} E_t[\sigma_{t+n}^2 - \sigma^2] &= (\alpha + \beta) E_t[\sigma_{t+n-1}^2 - \sigma^2] \\ &= (\alpha + \beta)^n (\sigma_t^2 - \sigma^2) \end{aligned} \quad (1.11)$$

La structure à terme de la volatilité peut être obtenue à partir du modèle GARCH(1,1). Une fonction $V(n) = E_t[\sigma_{t+n}^2]$ et une constante $a = -\ln(\alpha + \beta)$ sont d'abord définies. La fonction $V(n)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$V(n) = \sigma^2 + e^{-an} [V(0) - \sigma^2] \quad (1.12)$$

Avec $V(0) = \sigma_t^2$ la variance donnée par le modèle GARCH(1,1).

La variance moyenne sur l'intervalle $(0, T)$ est donnée par:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{u=0}^T V(u) du &= \frac{1}{T} \left(u \sigma^2 - \frac{e^{-au}}{a} [V(0) - \sigma^2] \right) \Big|_{u=0}^{u=T} \\ &= \sigma^2 + \frac{1 - e^{-aT}}{aT} [V(0) - \sigma^2] \end{aligned} \quad (1.13)$$

Comme l'équation (1.13) représente la variance moyenne quotidienne, il faut la multiplier par 252 pour l'annualiser :

$$\sigma^2(T) = 252 \times \left(\sigma^2 + \frac{1 - e^{-aT}}{aT} [V(0) - \sigma^2] \right) \quad (1.14)$$

Et la volatilité moyenne annuelle sera donnée alors par :

$$\sigma(T) = \sqrt{252 \times \left(\sigma^2 + \frac{1 - e^{-aT}}{aT} [V(0) - \sigma^2] \right)} \quad (1.15)$$

La structure à terme prévue par le modèle GARCH(1,1) peut être représentée graphiquement en traçant $\sigma(T)$ en fonction de T comme à la figure 1.1.

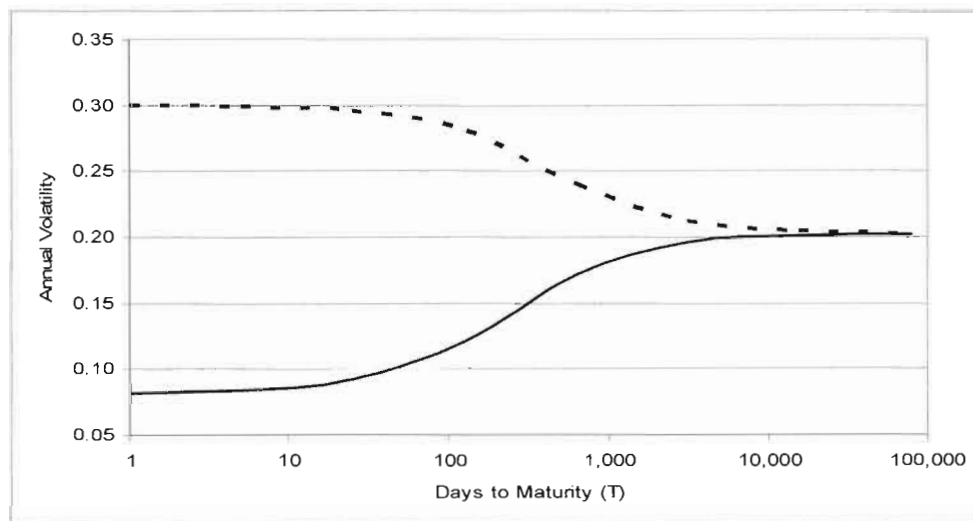


Figure 1.1 la structure à terme de la volatilité par le modèle de GARCH.

source : Fabrice Douglas et Gregory Vanberg (2007), p.174.

Quand la variance actuelle de GARCH σ_{t+1}^2 est inférieure à la variance à long terme σ^2 , la pente de la courbe sera positive. Cela revient au fait que lorsque $\alpha + \beta < 1$, la variance actuelle donnée par le modèle GARCH suit un processus de retour à la variance moyenne. Par conséquent, la variance actuelle augmentera de manière à converger vers la variance moyenne. Par contre, quand $\sigma_{t+1}^2 > \sigma^2$, la pente de la

courbe sera négative. En effet, la variance actuelle diminuera pour converger vers la variance à long terme.

1.2 Modèle de la volatilité implicite

Les volatilités implicites sont très importantes car elles sont intégrées dans les prix des options et ces derniers reflètent les anticipations futures du marché. Ceci implique que la volatilité implicite constitue une estimation prévisionnelle de la volatilité de l'action.

Des méthodes alternatives peuvent être utilisées pour estimer la volatilité future comme l'écart type et le modèle de GARCH. Malgré la simplicité de ces méthodes, elles constituent cependant des prévisions rétroactives de la volatilité puisqu'elles se basent sur des prix historiques. Par conséquent, la volatilité implicite reflète des anticipations futures de la volatilité plutôt que des réalisations passées.

Le type le plus populaire de volatilité implicite est celui de Black et Scholes. La volatilité implicite est obtenue par le biais de l'équation (1.16) :

$$C_{\text{mkt}}(K, T) = C_{\text{BS}}(\sigma_{\text{iv}}, K, T) \quad (1.16)$$

$C_{\text{mkt}}(K, T)$: est le prix de l'option observé sur le marché, avec un prix d'exercice K et d'échéance T .

$C_{\text{BS}}(\sigma_{\text{iv}}, K, T)$: est le prix du call obtenu par la formule de Black et Scholes avec le même prix d'exercice et la même échéance.

σ_{iv} : est la volatilité implicite obtenue par la formule de Black et Scholes qui donne le prix de l'option observé sur le marché.

Comme la résolution de l'équation ne peut se faire analytiquement, une résolution numérique s'impose.

L'équation (1.16) peut être exprimée sous la forme :

$$f(\sigma) = C_{BS}(\sigma, K, T) - C_{mkt}(K, T) \quad (1.17)$$

$f(\sigma)$ s'annule alors pour σ correspondant à la valeur de la volatilité implicite recherchée:

$$f(\sigma_{iv}) = 0. \quad (1.18)$$

Les méthodes utilisées pour déterminer les racines de la fonction $f(\sigma)$ sont particulièrement la méthode Newton-Raphson, la méthode de bisection et la méthode de Newton-Raphson- bisection³.

1.2.1 La méthode Newton-Raphson

Cette fonction requiert de connaître les inputs de l'option tels que le prix spot S , le prix d'exercice K , le taux sans risque r , l'échéance T et le type d'option, call ou put. Ensuite, elle retourne la valeur de la volatilité implicite quand la différence entre le prix observé et celui du modèle est inférieure à un seuil de tolérance ε .

$$C_{BS}(\sigma, K, T) - C_{mkt}(K, T) < \varepsilon \quad (1.19)$$

Bien que la méthode Newton-Raphson converge rapidement vers la valeur de la volatilité implicite, elle requière une valeur initiale estimée de la volatilité. Or il est fort connu que l'algorithme de recherche des racines est très sensible à la valeur de départ (« seed value »), et par conséquent, il peut dévier dramatiquement de la racine réelle.

³ Rouah Douglas F., et G. Vanberg, (2007), "Option Pricing Models & Volatility Using Excel-VBA", chapitre 10.

1.2.2 La méthode de bisection

Cette méthode est particulièrement bien adaptée pour calculer la volatilité implicite des prix des options avec la fonction $f(\sigma)$. Avec les bornes appropriées de la fonction, la méthode réussit toujours à trouver la racine. Dans le cas de la volatilité implicite, il est facile de trouver deux valeurs initiales σ_1 et σ_2 pour lesquelles la fonction $f(\sigma)$ prend respectivement une valeur positive $f(\sigma_1) > 0$ et une valeur négative $f(\sigma_2) < 0$.

Comme $C_{BS}(\sigma_{iv}, K, T)$ est une fonction croissante de la volatilité, une valeur élevée pour σ donnera lieu à un prix du call avec la formule de Black et Scholes plus élevé que le prix du marché, et une valeur positive de $f(\sigma)$. Par contre, une valeur très petite pour σ donnera l'inverse. Par conséquent, lorsqu'on utilise la méthode de bisection pour trouver la volatilité implicite de Black et Scholes, on aura besoin de fixer deux valeurs pour σ_1 et σ_2 .

Bien que cette méthode trouve toujours la racine de la fonction $f(\sigma)$, elle requiert plus de temps et de calculs que la méthode Newton-Raphson. Cette dernière cherche la racine à chaque pas de l'algorithme tandis que la méthode de la bisection divise l'intervalle en deux à chaque pas. Il est alors possible d'appliquer les deux méthodes simultanément pour ainsi réaliser une convergence plus rapide qu'avec chaque méthode prise séparément. Ainsi, à chaque pas, si la valeur estimée de la volatilité se situe en dehors des bornes, une étape bissectrice est performée pour assurer la convergence. Une valeur initiale de volatilité n'est pas alors requise mais plutôt des bornes, et la valeur de départ sera définie comme le centre de l'intervalle. Cette méthode est appelée la méthode Newton-Raphson Bisection.

Le modèle de volatilité implicite permet d'identifier les propriétés des distributions des rendements des actions à travers un « smile » ou un « smirk ». En effet, ce modèle tient compte du degré d'asymétrie de la distribution et du coefficient d'aplatissement. Le « smile » provient du fait que les rendements ont un kurtosis

plus élevé que celui correspondant à la distribution normale, soit 3, et le « smirk » se produit car les rendements ont généralement une asymétrie négative. Ils sont plus prononcés pour les options à court terme que pour les options à long terme.

1.3 Calcul de la volatilité implicite non basé sur des modèles (« Model-free implied volatility »)

Le fondement théorique revient à Britten-Jones et à Neuberger (2000) qui ont dérivé ces méthodes de calcul de la volatilité. En effet, pour prévoir la volatilité, ils ne se basent pas sur un modèle spécifique mais ils utilisent un ensemble de prix d'options, soit des Calls européens avec des prix d'exercices et des échéances variant de zéro jusqu'à l'infini.

Sous l'hypothèse que l'action ne verse pas de dividendes et que le taux sans risque est nul, ils ont pu calculé l'espérance des rendements risque neutre entre deux dates T_1 et T_2 par le biais de l'équation (1.20) :

$$E^Q \left[\int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \right] = 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_2, K) - C(T_1, K)}{K^2} dK \quad (1.20)$$

E^Q : est l'espérance sous la mesure risque neutre (Q)

$C(T, K)$: est le prix du call observé avec une échéance T et un prix d'exercice K,

S_t étant le prix de l'action au temps t

$\left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2$: représente la variance des rendements qui est aussi la volatilité au carré

L'équation (1.20) n'est pas basée sur un modèle, mais requiert plutôt deux ensembles de prix des Call dont le prix d'exercice K varie de zéro jusqu'à l'infini et d'échéance T_1 pour un groupe et de T_2 pour l'autre. La volatilité est alors obtenue en calculant la racine carrée de l'équation (1.20).

Mais comme démontré par Britten-Jones et Neuberger (2000), l'espérance sous la mesure risque neutre de la racine carrée de la volatilité est la volatilité implicite de Black et Scholes et cela produit une estimation biaisée de la volatilité comme l'illustre l'inégalité (1.21) de Jensen⁴:

$$E^Q \left[\int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \right] \leq 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_2, K) - C(T_1, K)}{K^2} dK \quad (1.21)$$

Néanmoins, la partie à droite sera utilisée comme une estimation de la méthode des calculs non basés sur un modèle.

Jiang et Tian (2005)⁵ ont calculé les trois types de volatilité, soient la volatilité historique, la volatilité implicite et la volatilité non basée sur un modèle, pour évaluer comment chacune de ces volatilités prédit la volatilité future de l'action. Ils conclurent que les trois mesures de la volatilité contiennent de l'information sur la volatilité future, mais la volatilité implicite et la volatilité non basée sur un modèle sont plus importantes que la volatilité historique vu qu'elles comprennent la prime de risque relié à la volatilité stochastique. De plus, ils conclurent que le « Model free implied volatility » comprend le plus d'information sur la volatilité future et par la suite constitue le meilleur estimateur de la volatilité par rapport à la volatilité implicite et la volatilité réalisée.

En pratique, Jiang et Tian (2005) modifient le processus pour inclure les dividendes et le taux sans risque. Ainsi, le prix de l'action s'écrit selon l'équation (1.22) suivante:

⁴ Britten-Jones M., et A. Neuberger, (2000), Option Prices, Implied Price Processes, and Stochastic Volatility.

⁵ Article Review: Castaldo A., (2005), The Model-Free Implied Volatility and Its Information Content.

$$S_t^* = S_t - PV[D] \quad (1.22)$$

S_t : le prix actuel de l'action

D : le montant total des dividendes versés, et $PV[D]$ représente leur valeur actuelle.

Et en tenant compte du taux sans risque, le prix à terme F_t de l'action sera

$$F_t = S_t^* e^{r(T-t)} \quad (1.23)$$

Il est facile de montrer qu'une option sur F_t est équivalente à une option sur S_t^* , avec un prix d'exercice de Ke^{rT} .

En incorporant les deux équations (1.22) et (1.23) dans l'équation (1.21) de l'espérance sous la mesure risque neutre, on a:

$$E^Q \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \right] = 2 \int_0^\infty \frac{C(T_2, Ke^{rt_2}) - C(T_1, Ke^{rt_1})}{K^2} dK \quad (1.24)$$

L'équation (1.24) prend en considération les dividendes versés et le taux sans risque en calculant la variance de l'action.

Pour dériver une mesure de volatilité comparable à la volatilité implicite, on doit calculer la variance entre la date actuelle et une date postérieure. Cela est effectué en fixant $T_1 = 0$ et $T_2 = T$, où T est l'échéance de l'option. On aura alors :

$$E^Q \left[\int_0^T \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \right] = 2 \int_0^\infty \frac{C(T, Ke^{rT}) - \max(S_0 - K, 0)}{K^2} dK \quad (1.25)$$

A noter qu'un simple échantillon de prix d'option est requis pour effectuer le calcul. Cependant, deux problèmes se manifestent : la discrétisation des prix du call et la troncature du domaine d'intégration. En effet, les prix du call sur le marché sont

disponibles dans un sous-ensemble de l'intervalle d'intégration. Ce qui implique que le domaine d'intégration sera tronqué. De plus, ces prix sont disponibles seulement dans des intervalles finis, souvent des intervalles de cinq dollars, ce qui introduit un problème de discrétisation.

1.3.1 Calcul de volatilité à terme non basé sur des modèles (« Model-free implied forward volatility »)⁶

Jusqu'à maintenant, on a pu calculer la volatilité à partir du temps 0 ou d'aujourd'hui jusqu'à l'échéance. Or on peut estimer la volatilité dans un intervalle de temps $[T_1, T_2]$ en réarrangeant l'équation (1.24) de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
 E^Q \left[\int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \right] &= 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_2, Ke^{rT_2}) - C(T_1, Ke^{rT_1})}{K^2} dK \\
 &= 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_2, Ke^{rT_2})}{K^2} dK - 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_1, Ke^{rT_1})}{K^2} dK \\
 &= 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_2, Ke^{rT_2}) - \max(S_0 - K, 0)}{K^2} dK - 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_1, Ke^{rT_1}) - \max(S_0 - K, 0)}{K^2} dK
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Par conséquent, on peut exprimer la variance à terme dans un intervalle de temps $[T_1, T_2]$ comme la différence entre deux variances, où l'une est dans l'intervalle $[0, T_1]$ et l'autre, dans l'intervalle $[0, T_2]$. La volatilité à terme sera donc donnée par la racine carrée de l'équation (1.25)

$$\sqrt{2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_2, Ke^{rT_2}) - \max(S_0 - K, 0)}{K^2} dK - 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_1, Ke^{rT_1}) - \max(S_0 - K, 0)}{K^2} dK} \tag{1.26}$$

⁶ Rouah Douglas F., et G. Vanberg, (2007), "Option Pricing Models & Volatility Using Excel-VBA", chapitre 11.

1.4 Modèle de volatilité stochastique avec retour à la moyenne

Le modèle de volatilité stochastique avec retour à la moyenne⁷ constitue également un moyen d'analyse qui tient compte du fait que la volatilité de l'actif sous-jacent n'est pas constante durant la vie de l'option mais elle évolue selon un processus de diffusion géométrique selon l'équation (1.27). Dans ce modèle, le prix de l'actif sous-jacent est supposé être une variable aléatoire soumis à un processus de diffusion géométrique selon l'équation (1.28). Le processus de diffusion suivi par le prix du sous-jacent est corrélé au processus suivi par sa volatilité par un coefficient de corrélation dénoté par ρ et donné par l'équation (1.29) :

$$d\sigma = \mu_s \sigma dt + \sigma_s \sigma dz_s \quad (1.27)$$

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (1.28)$$

$$dz_s = \rho dz \quad (1.29)$$

avec:

μ_s : taux de croissance instantané de la volatilité

σ_s : volatilité de la volatilité

ρ : le coefficient de corrélation entre dz et dz_s .

La volatilité d'un titre peut augmenter ou diminuer quand son rendement augmente ou vice versa et par conséquent, le coefficient de corrélation peut être positif ou négatif.

Le processus de diffusion de la volatilité du sous-jacent décrit par l'équation (1.27) laisse sous-entendre que la volatilité moyenne de même que la variance de la volatilité évoluent dans le temps selon la loi lognormale. Le processus de retour à la moyenne peut être ainsi exprimé selon l'équation (1.30):

⁷ Khoury N., et J.-M. Ganon (2005), Les régimes de rémunération à base d'options aux dirigeants : charge comptable et régie d'entreprise, cahier de recherche, pp. 9- 10.

$$d\sigma^2 = a(\mu_s - \sigma^2) dt + \sigma_s \sigma^2 dz_s \quad (1.30)$$

a : paramètre de vitesse de retour à la moyenne

μ_s : taux de croissance instantané de la volatilité

$a(\mu_s - \sigma^2) dt$: la croissance instantanée de la variance (« drift rate »).

Dans l'hypothèse d'une distribution normale des rendements des titres, les modèles décrits ci-devant exigent que l'on connaisse les deux premiers moments de la distribution, soit l'espérance mathématique μ et l'écart type σ . Mais dans les faits, la distribution des rendements n'est pas normale. On doit alors considérer les autres moments soit le degré d'asymétrie de la distribution et le coefficient d'aplatissement.

1.5 Le modèle du VIX (Volatility Index)

En 1993, le Chicago Board Options Exchange (CBOE) a introduit l'indice de volatilité de CBOE, soit le VIX⁸, qui est devenu rapidement le benchmark pour les volatilités des actions en bourse. Le VIX reflète les attentes des marchés en ce qui concerne les volatilités à court terme intégrées dans les prix des options écrites sur l'indice S&P500. Il se base sur le « Model free implied volatility » plutôt que sur le modèle de Black et Scholes.

La formule générale utilisée pour calculer le VIX est la suivante :

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (1.31)$$

⁸ www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf

$\sigma = \text{VIX}/100$ ou $\text{VIX} = \sigma * 100$

T : est l'échéance

F : est l'indice à terme

K_0 : est le premier prix d'exercice inférieur à l'indice à terme, F

r : est le taux sans risque

K_i : est le prix d'exercice de l'option i hors-jeu

ΔK_i : est l'intervalle entre deux prix d'exercices tel que $\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$

$Q(K_i)$: point milieu de l'écart entre les cours acheteur et vendeur d'une option dont le prix d'exercice est K_i

La figure 1.2 représente les valeurs de fermetures du VIX pour la période s'étendant du 2 janvier 1990 au 17 décembre 2007 tel que donné par le site yahoo finance.

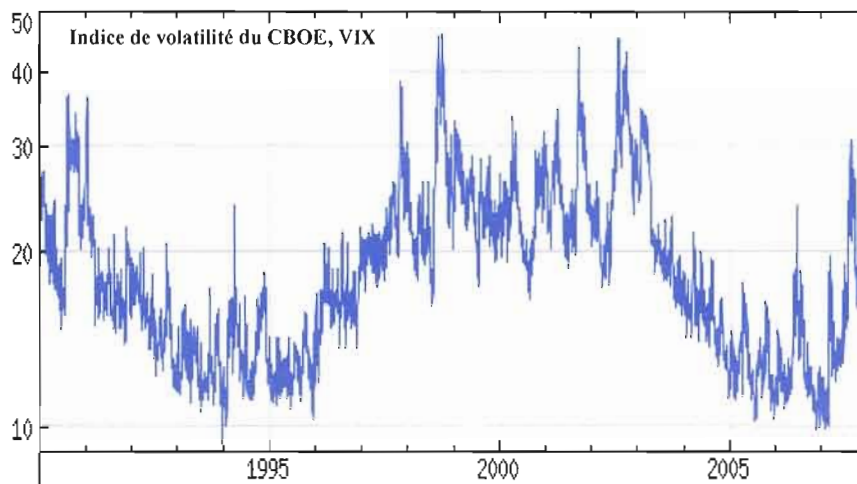


Figure 1.2 les valeurs de fermeture de l'indice de volatilité, VIX, du 2 janvier 1990 au 17 décembre 2007.

Source: <http://finance.yahoo.com/>

Le VIX utilise en général des put et des call dont l'expiration est dans les deux mois les plus proches afin de couvrir une période de 30 jours. Carr et Wu(2006) expliquent la dérivation du VIX et sa relation avec l'approximation d'un taux de swap de la variance sur une période de 30 jours (« 30-day variance swap rate »). En d'autres termes, le premier ensemble de prix d'options utilisés renferme des options dont l'échéance est de moins de 30 jours. Le deuxième ensemble de prix d'options contient des options dont l'échéance est de plus de 30 jours.

Le temps jusqu'à échéance T_i ($i = 1,2$) de chaque sous-ensemble est calculé en minutes et à partir du moment de calcul du jour courant. Il est ensuite exprimé en année selon l'équation (1.32):

$$T_i = \frac{N_{Ti}}{M_Y} = \frac{(M_C + M_S + M_O)}{M_Y} \quad (1.32)$$

N_{Ti} = nombre de minutes jusqu'à l'échéance du sous-ensemble d'options i
 $= M_C + M_S + M_O$

M_C = nombre de minutes du temps de calcul jusqu'à minuit du jour courant

M_S = nombre de minutes de minuit jusqu'à 8h30 am le jour suivant
 $= 8.5 * 60 = 510 \text{ min}$

M_O = nombre de minutes du jour suivant jusqu'à l'échéance.

$M_Y = 365 * 24 * 60 = 525\,600 \text{ min}$, indépendamment du temps de calcul.

Le Chicago Board Options Exchange (CBOE) explique comment calculer le VIX avec deux sous-ensembles de prix d'options en trois étapes. Chaque sous-ensemble est trié selon le prix d'exercice et n'inclut pas plus que deux options consécutives hors-jeu dont le prix est nul. Pour chaque option, le point milieu de l'écart entre le cours acheteur (« bid ») et le cours vendeur (« ask ») de l'option est considéré comme le prix de l'option.

➤ **1^{ère} étape :** Sélectionner les options pour le calcul du VIX et l'indice à terme F pour chaque sous-ensemble. Le prix d'exercice K de l'option à parité est le

prix de référence pour lequel la différence en valeur absolue du prix du call et du prix du put est la plus petite. L'indice à terme F est calculé en utilisant cette différence comme suit:

$$F = K + e^{rT} \times |Call - Put| \quad (1.33)$$

Les options hors-jeu sélectionnées sont des puts dont le prix d'exercice est inférieur à K_0 et des calls dont le prix d'exercice est supérieur à K_0 . Le prix de l'option dont le prix d'exercice est égal à K_0 est défini comme la moyenne des prix du call et du put de même prix d'exercice.

- **2^{ème} étape :** Calculer la volatilité de chaque sous-ensemble d'échéance T_1 et T_2 à partir de l'équation (1.31):

$$\sigma_1^2 = \frac{2}{T_1} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT_1} Q(K_i) - \frac{1}{T_1} \left(\frac{F_1}{K_0} - 1 \right)^2 \quad (1.34)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{2}{T_2} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT_2} Q(K_i) - \frac{1}{T_2} \left(\frac{F_2}{K_0} - 1 \right)^2 \quad (1.35)$$

- **3^{ème} étape :** Interpoler les deux variances σ_1 et σ_2 calculées pour obtenir la variance correspondante à une échéance de 30 jours. Finalement, la racine carrée de la variance est multipliée par 100 pour avoir l'indice VIX de la volatilité sur 30 jours selon l'équation (1.36):

$$\sigma_{VIX} = 100\% \times \sqrt{T_1 \sigma_1^2 \left(\frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) + T_2 \sigma_2^2 \left(\frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) \times \left(\frac{N_{365}}{N_{30}} \right)} \quad (1.36)$$

N_{T_1} = nombre de minutes jusqu'à l'échéance du premier sous-ensemble

N_{T_2} = nombre de minutes jusqu'à l'échéance du second sous-ensemble

N_{30} = 43 200 min, soit le nombre de minutes dans 30 jours

N_{365} = 525 600 min, soit le nombre de minutes dans 365 jours.

MÉTHODOLOGIE

Cette section présente la méthodologie retenue pour le travail. Le modèle utilisé est celui de Heston. La démarche consiste à adapter le modèle pour estimer la volatilité de l'indice S&P500 à partir des prix des options puis comparer la volatilité prévue par le modèle à celle réellement observée et ainsi être en mesure d'évaluer la validité du modèle comme moyen de prévoir la volatilité des actions.

CHAPITRE II

LE MODÈLE DE HESTON (1993)

2.1 Le modèle

Ce modèle⁹ représente une généralisation du modèle Black et Scholes du fait qu'il incorpore une volatilité qui varie avec le temps lors du calcul du prix de l'option. Ce modèle fournit une solution analytique («closed-form solution») pour calculer le prix d'une option d'achat, call, lorsqu'il y a une corrélation entre le prix du sous-jacent et sa volatilité. Il peut être adapté pour incorporer des taux d'intérêts stochastiques et par conséquent il peut être utilisé pour calculer le prix des options sur obligations et devises étrangères.

Il y a deux façons d'utiliser ce modèle, soit à travers la simulation de Monte Carlo du processus décrivant le prix de l'action, soit à travers une résolution analytique du prix de l'option qui exige l'évaluation d'intégrales complexes. Des expérimentations empiriques ont démontré que le modèle d'Heston tient compte de l'asymétrie (skewness) et du coefficient d'aplatissement (Kurtosis) de la distribution des prix de l'action et ajuste le prix des options en conséquence.

⁹ Cette section s'inspire de l'article de Heston S.,(1993), « A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options », et du livre de Rouah F., et G. Vainberg,(2007), « Option Pricing Models & Volatility », chapitre 5.

Le processus de diffusion qui décrit le prix de l'action est identique à celui de Black et Scholes, à l'exception de la volatilité qui varie dans le temps. Ce processus est décrit par l'équation (2.1):

$$dS_t = \mu S dt + \sqrt{v(t)} S dz_1(t) \quad (2.1)$$

S : prix de l'action sous-jacente

μ : taux de rendement espéré instantané de l'action (drift parameter)

$\sqrt{v(t)}$: Volatilité du rendement de l'action

$dz_1(t)$: variable aléatoire brownienne du processus de Wiener, dont l'espérance est nulle et la variance égale à l'unité.

Si la volatilité $\sqrt{v(t)}$ suit le processus de diffusion de Ornstein-Uhlenbeck suivant:

$$d\sqrt{v(t)} = -\beta\sqrt{v(t)} dt + \delta dz_2(t) \quad (2.2)$$

où $z_2(t)$ est un processus de Wiener qui a une corrélation ρ avec $z_1(t)$, alors le lemme d'îto permet de montrer que le processus de diffusion de la variance $v(t)$ s'écrit alors comme le montre l'équation (2.3) :

$$dv(t) = [\delta^2 - 2\beta v(t)] dt + 2\delta\sqrt{v(t)}dz_2(t) \quad (2.3)$$

L'équation (2.3) peut se réécrire sous la forme du processus de Cox, Ingersoll, et Ross (1985):

$$dv(t) = \kappa [\theta - v(t)] dt + \sigma \sqrt{v(t)} dz_2(t) \quad (2.4)$$

θ : la moyenne de la variance à long terme

κ : un paramètre de retour à la moyenne

σ : la volatilité de la volatilité

Par analogie avec le modèle de Black et Scholes, le prix d'un Call européen au temps t avec une échéance de $T-t$, et dénoté par $Call(S, v, t)$, selon Heston est donné par :

$$C(S, v, t) = S P_1 - K P(t, T) P_2 \quad (2.5)$$

S : prix de l'action au temps t

K : le prix d'exercice de l'option

$P(t, T)$: le taux d'actualisation du temps t à T

P_1 et P_2 sont les probabilités risque neutres que le call vienne à échéance en jeu.

La parité entre le prix d'un call et celui d'un put permet d'obtenir le prix du put selon la l'équation (2.6) :

$$Put(S, v, t) = Call(S, v, t) + K P(t, T) - S \quad (2.6)$$

En considérant le logarithme du prix de l'action $x(t) = \ln(S) = x$ et la volatilité $v(t) = v$ au temps t , les équations stochastiques risque neutres de Heston s'écrivent alors :

$$dx(t) = \left[r - \frac{1}{2} v(t) \right] dt + \sqrt{v_t} dz_1(t) \quad (2.7)$$

$$dv(t) = \kappa [\theta - v(t)] dt + \sigma \sqrt{v_t} dz_2(t) \quad (2.8)$$

Les probabilités risque neutres seront obtenues par :

$$P_j = Pr(x_T \geq \ln(K) \mid x_t = x, v_t = v) \quad \text{pour } j=1,2 \quad (2.9)$$

Ainsi,

$$P_j(x, v, T; \ln[K]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln[K]} f_j(x, v, T; \phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (2.10)$$

$f_j(x, v, T; \phi) = e^{(C_j + D_j v + i\phi x)}$ est la fonction caractéristique

$$C_j = r\phi i\tau + \frac{k\theta}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi.i + d_j)\tau - 2 \ln \left[\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right] \right\}$$

$$D_j = \frac{b_j - \rho\sigma\phi.i + d_j}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right]$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma\phi.i + d_j}{b_j - \rho\sigma\phi.i - d_j}$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma\phi.i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi.i - \phi^2)}$$

$\tau = T - t$: temps à l'échéance

$i = \sqrt{-1}$: l'unité imaginaire

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma, \quad b_2 = \kappa + \lambda$$

Le paramètre λ représente le prix du risque de la volatilité défini en fonction du prix de l'action, du temps et de la volatilité. Pour pouvoir calculer le prix du call ou du put, il faut d'abord évaluer la valeur des deux intégrales complexes ci-dessus.

2.1.1 L'approche d'évaluation complète

Cette approche est une simulation Monte Carlo. Un grand nombre de trajectoires du prix de l'action est généré durant la vie de l'option selon le processus stochastique de S_t . Pour chaque trajectoire de prix, la valeur terminale de l'option est actualisée au taux sûr jusqu'au temps zéro. Ceci donne le prix de l'option pour une trajectoire. Ce processus est répété plusieurs fois et le prix de l'option sera évalué comme la moyenne des prix de l'option actualisés sur chaque trajectoire.

2.1.2 L'approche de résolution analytique

Cette méthode est plus rapide que la précédente puisque l'on n'a pas à

générer des trajectoires de prix. Cependant elle est plus difficile à implanter car elle requiert l'évaluation d'intégrales complexes lors du calcul des probabilités risque neutres P_1 et P_2 .

Cette approche requiert de connaître le prix spot S_t de l'action, le prix d'exercice K , le temps jusqu'à échéance $\tau = T - t$, et le taux sans risque r . Elle requiert également d'estimer les paramètres du processus tels que la variance à long terme θ , la variance courante v_t , le prix du risque de la volatilité λ , le paramètre de retour à la moyenne κ , la volatilité de la variance σ , et le facteur de corrélation ρ entre le processus décrivant le prix de l'action et celui de sa volatilité.

Dans ce cas, la faiblesse du modèle de Heston (1993) provient de la nécessité d'une intégration numérique et les prix de l'option seront très sensibles à la dimension de l'intervalle d'intégration.

Il y a deux paramètres qui attirent particulièrement l'attention:

- a) Le coefficient de corrélation entre le prix de l'action et sa volatilité, soit ρ . Une valeur négative de ρ induit une asymétrie négative dans la distribution des prix de l'action. En effet, l'asymétrie positive ou négative affecte les prix des options. Quand les prix du titre présentent une asymétrie négative, la probabilité de réaliser de grandes pertes est plus importante que celle prédite par le modèle Black&Scholes. Le modèle de Heston est capable de détecter l'asymétrie de la distribution et d'ajuster le prix du call en conséquence.
- b) La volatilité de la variance σ qui affecte le prix du call. Le cas le plus simple est celui pour lequel $\sigma = 0$, ce qui correspond à une variance déterministe dans le processus décrivant la volatilité de l'action. La volatilité de la variance contrôle le coefficient d'aplatissement ou « kurtosis » de la distribution des rendements : une plus grande volatilité de la variance augmente le kurtosis de la distribution tandis qu'une plus petite volatilité le fait diminuer.

En comparant le modèle de Heston à celui de Black et Scholes, on remarque que le modèle de Heston accorde des prix inférieurs au call qui est à parité mais

des prix plus élevés pour les call en jeu ou hors jeu.

2.2 Adaptation du modèle

Comme on l'a vu dans la section précédente, le modèle de Heston (1993) est utilisé pour estimer le prix de l'option. Dans cette section, nous allons adapter le modèle pour qu'il puisse estimer la volatilité de l'action à partir des prix des options écrites sur cette action. Rappelons les équations stochastiques risque neutre (2.7) et (2.8) de Heston :

$$dx(t) = \left[r - \frac{1}{2} v(t) \right] dt + \sqrt{v_t} dz_1(t) \quad (2.7)$$

$$dv(t) = \kappa [\theta - v(t)] dt + \sigma \sqrt{v_t} dz_2(t) \quad (2.8)$$

Or il est possible d'obtenir des variances négatives quand la discrétisation d'Euler est appliquée au processus. Pour pallier ce problème, le logarithme de la variance sera considéré pour s'assurer que la variance soit positive:

$$y(t) = \ln[v(t)] = y \quad (2.11)$$

En appliquant le lemme d'Itô à l'équation (2.8), et en utilisant l'équation (2.11) on obtient l'équation décrivant le processus suivi par la variance:

$$d \ln[v(t)] = \frac{1}{v(t)} \left(\kappa [\theta - v(t)] - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma \frac{1}{\sqrt{v(t)}} dz_2(t) \quad (2.12)$$

L'équation (2.12) est ensuite discrétisée pour pouvoir simuler la trajectoire de la volatilité selon l'approche d'évaluation complète, ou la simulation de Monte Carlo, selon l'équation (2.13) :

$$\ln[v(t + \Delta t)] = \ln[v(t)] + \frac{1}{v(t)} \left(\kappa[\theta - v(t)] - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \frac{1}{\sqrt{v(t)}} \sqrt{\Delta t} \varepsilon_v(t+1) \quad (2.13)$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon_v(t+1) = \rho \varepsilon_s(t+1) + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon(t+1) \quad (2.14)$$

Les chocs appliqués à la volatilité sont corrélés avec les chocs appliqués au processus du prix de l'action avec un facteur de corrélation dénoté ρ . Les ε_{t+1} sont des variables aléatoires distribuées normalement et qui ne sont pas corrélées aux $\varepsilon_{s,t+1}$. Pour simuler la volatilité avec les équations (2.13) et (2.14), il faut estimer tout d'abord les paramètres du modèle, soit κ (kappa), θ (thêta), σ (sigma), et ρ (rho).

2.3 Estimation des paramètres

Pour le modèle de Heston, l'estimation des paramètres se fait en minimisant l'écart entre les prix des options générés par le modèle et les prix observés sur le marché. Trois formes de fonctions « Error Loss Functions » seront utilisées pour estimer les paramètres du modèle. Ces méthodes sont cohérentes avec les prix des options car elles fournissent des paramètres estimés qui, lorsque utilisés dans le modèle, génèrent des prix d'options très proches de ceux observés sur le marché.

2.3.1 La méthode \$RMSE

La méthode \$RMSE ou « root mean squared error loss function » donne la racine carrée de la moyenne des carrés des termes d'erreur $e_i(\Theta)$ ($i = 1, \dots, N$) :

$$\$RMSE(\Theta) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2(\Theta)} \quad (2.15)$$

où $e_i(\Theta) = C_i - C_i(\Theta)$ sont les termes d'erreur

N = nombre de prix d'options qui existent sur le marché

C_i = les prix des N options sur le marché

$C_i(\Theta)$ = les prix de ces N options calculer à partir du modèle (Heston dans notre cas),
et qui dépendent sur un ensemble de paramètres Θ .

2.3.2 La méthode %RMSE

La méthode %RMSE ou « relative root mean squared error loss function » minimise l'écart relatif (%) de la racine carrée de la moyenne des carrés des termes d'erreur $e_i(\Theta)$ ($i = 1, \dots, N$) :

$$\%RMSE(\Theta) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{e_i(\Theta)}{C_i} \right)^2} \quad (2.16)$$

2.3.3 La méthode ivRMSE

Cette méthode « implied volatility root mean squared error loss function » minimise l'écart entre les volatilités implicites des prix des options observées sur le marché et celles obtenues des prix donnés par le modèle (de Heston dans notre cas).

$$ivRMSE(\Theta) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_i - \sigma_i(\Theta))^2} \quad (2.17)$$

où σ_i = volatilité implicite de Black et Scholes obtenue avec $C_{mkt} = C_{BS}(\sigma_{iv}, K, T)$

$\sigma_i(\Theta)$ = volatilité implicite de Black et Scholes obtenue avec $C_{heston} = C_{BS}(\sigma_{iv}, K, T)$

2.4 Les données utilisées lors des calculs

Les données utilisées¹⁰ pour les calculs sont les prix des call et des put écrits sur l'indice S&P500 échéant le troisième vendredi du mois d'échéance et qui étaient disponibles sur le marché. Nous ne considérons que les options du SPX transigées lors de la plus récente journée de chaque année de 2000 à 2007 et dont les volumes étaient les plus élevés. Le tableau 2.1 ci-dessous montre un sous ensemble des options utilisées pour estimer les paramètres du modèle de Heston (1993) pour l'année 2007.

¹⁰ <https://www.marketdataexpress.com/>

Tableau 2.1

Les options sur l'indice S&P500 au 16 novembre 2007

16-Nov-2007	K	S	prix	T	rf
Put	850	1458.74	0.05	0.0960	0.0322
Put	900	1458.74	0.2	0.0960	0.0322
Put	950	1458.74	0.1	0.0960	0.0322
Put	1000	1458.74	0.4	0.0960	0.0322
Put	1190	1458.74	2.6	0.0960	0.0322
Put	1200	1458.74	2.5	0.0960	0.0322
Put	1300	1458.74	11	0.0960	0.0322
Put	1325	1458.74	10.9	0.0960	0.0322
Put	1350	1458.74	21.6	0.0960	0.0322
Put	1375	1458.74	20.6	0.0960	0.0322
Put	1475	1458.74	57.3	0.0960	0.0322
Call	1550	1458.74	8	0.0960	0.0322
Call	1575	1458.74	1.8	0.0960	0.0322
Call	1575	1458.74	112.4	0.0960	0.0322
Call	1575	1458.74	5.3	0.0960	0.0322
Call	1600	1458.74	2.15	0.0960	0.0322
Call	1600	1458.74	0.6	0.0960	0.0322
Call	1625	1458.74	0.3	0.0960	0.0322
Call	1625	1458.74	151.5	0.0960	0.0322
Call	1640	1458.74	0.3	0.0960	0.0322
Call	1650	1458.74	0.15	0.0960	0.0322
Call	1650	1458.74	199	0.0960	0.0322
Call	1675	1458.74	0.05	0.0960	0.0322
Call	1700	1458.74	0.05	0.0960	0.0322
Call	1700	1458.74	251	0.0960	0.0322
Call	1725	1458.74	0.1	0.0960	0.0322
Call	1750	1458.74	0.1	0.0960	0.0322
Call	1775	1458.74	0.9	0.0960	0.0322
Call	1800	1458.74	0.05	0.0960	0.0322

Le tableau 2.2 fournit les paramètres estimés du modèle de Heston par les trois méthodes \$RMSE, %RMSE, et ivRMSE respectivement¹¹ utilisant les données du tableau 2.1.

¹¹ Le code VBA utilisé pour les calculs, ainsi que les chiffriers Excel, se trouvent à l'annexe 1.

Tableau 2.2
Les Paramètres estimés de Heston selon les trois méthodes

Paramètres	\$RMSE	%RMSE	ivRMSE
kappa	0.1042	0.1196	0.1417
theta	0.2141	0.1951	0.1906
sigma	0.1001	0.1051	0.0170
rho	-0.5388	-0.6927	-0.4663

Chacune de ces trois « Loss Functions » assigne des poids différents aux options lors des calculs des paramètres. La méthode \$RMSE accorde plus de poids aux options en jeu car ces dernières sont plus chères. Ce qui fait que l'écart d'erreur entre le prix du marché et celui du modèle va être plus grand et par conséquent, les paramètres estimés vont induire de petites erreurs pour les prix des options en jeu.

La méthode %RMSE, de son côté, assigne plus de poids aux options fortement hors jeu car ces options ont des prix relativement faibles. Or dans la formule, ces prix se retrouvent au dénominateur, donc le terme d'erreur est amplifié pour ce type d'options.

Quant à la méthode ivRMSE, elle accorde des poids équivalents à tous les types d'options. Ceci revient à ce que cette méthode cherche à minimiser l'écart d'erreur entre les volatilités implicites observées sur le marché et les volatilités implicites obtenues à partir des prix générés par le modèle, soit celui de Heston (1993) dans notre cas.

CHAPITRE III

ESTIMATION DE LA VOLATILITÉ DU S&P 500

3.1 Les équations

Rappelons les deux équations du modèle de Heston spécifiées au chapitre II et qui seront utilisées pour simuler et estimer la volatilité de l'indice S&P500 :

$$\ln[v(t + \Delta t)] = \ln[v(t)] + \frac{1}{v(t)} \left(\kappa[\theta - v(t)] - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \frac{1}{\sqrt{v(t)}} \sqrt{\Delta t} \varepsilon_v(t+1)$$

(3.1)

$$\varepsilon_v(t+1) = \rho \varepsilon_s(t+1) + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon(t+1)$$

(3.2)

Les paramètres kappa, thêta, sigma, rho et la variance de départ V_0 estimés à la section précédente sont utilisés par ces deux équations pour simuler¹² la trajectoire suivie par la volatilité et qui est présentée à la figure 3.1.

¹² Le code VBA et le chiffrier Excel utilisés pour les calculs se trouvent à l'annexe 2.

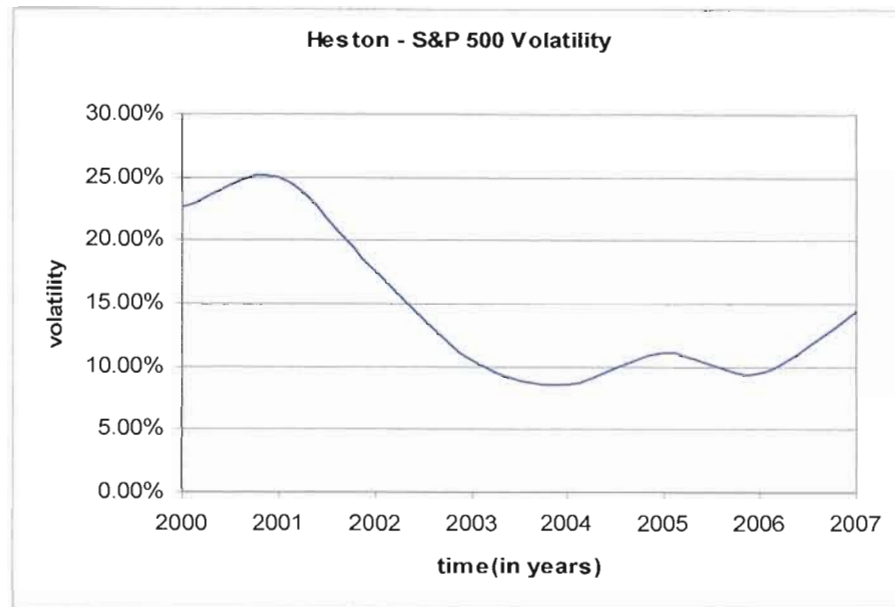


Figure 3.1 Volatilité de l'indice S&P 500 générée par le modèle de Heston.

3.2 Résultats

La volatilité générée par ce modèle pour chaque année est au jour le jour. En partant de la volatilité estimée du premier jour de l'année et en appliquant les deux équations du modèle de Heston (3.1) et (3.2), on peut générer la volatilité de l'indice pour toute l'année. En effet la raison pour laquelle on a choisi de considérer chaque année à part, c'est parce qu'on a à calculer des itérations avec la simulation de Monte Carlo à l'aide du programme VBA. Pour augmenter la précision et la convergence des résultats, on calculera pour 1000 itérations par jour. Si on considère générer la volatilité de l'année 2000 à 2007 d'un seul coup, on aura un très grand nombre d'itérations, de l'ordre de 2920000 (8années x 365jx1000). Ainsi en considérant chaque année à part, on diminue le nombre des calculs pour que le programme VBA puisse les effectuer sans contrainte. De plus, les paramètres estimés utilisés sont ceux qui sont calculés par la méthode \$RMSE, car ils sont les mieux adaptés au modèle

bien calibré.

Les figures (3.2) à (3.9) montrent la volatilité de l'indice S&P500 pour chaque année, simulée à l'aide du modèle de Heston.

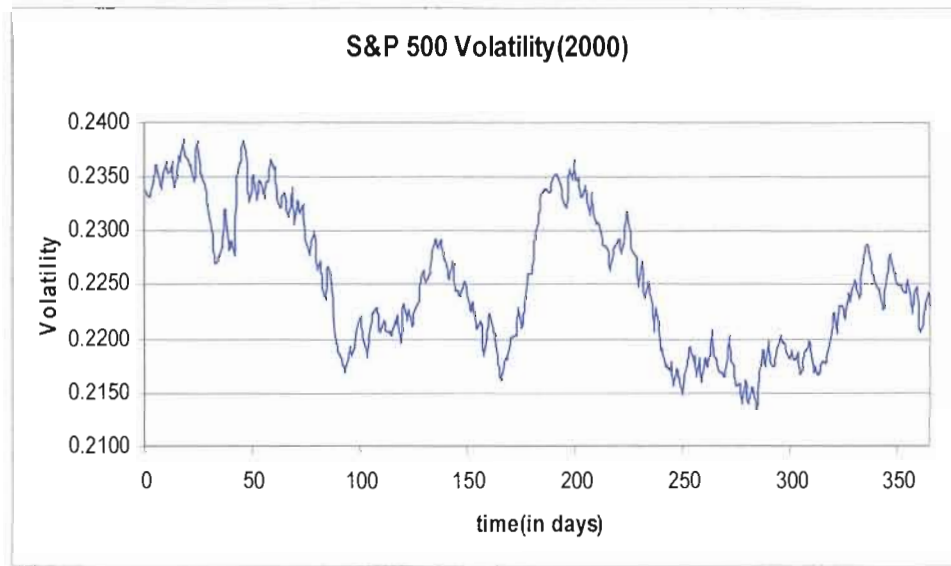


Figure 3.2 La volatilité du S&P 500 pour l'année 2000.

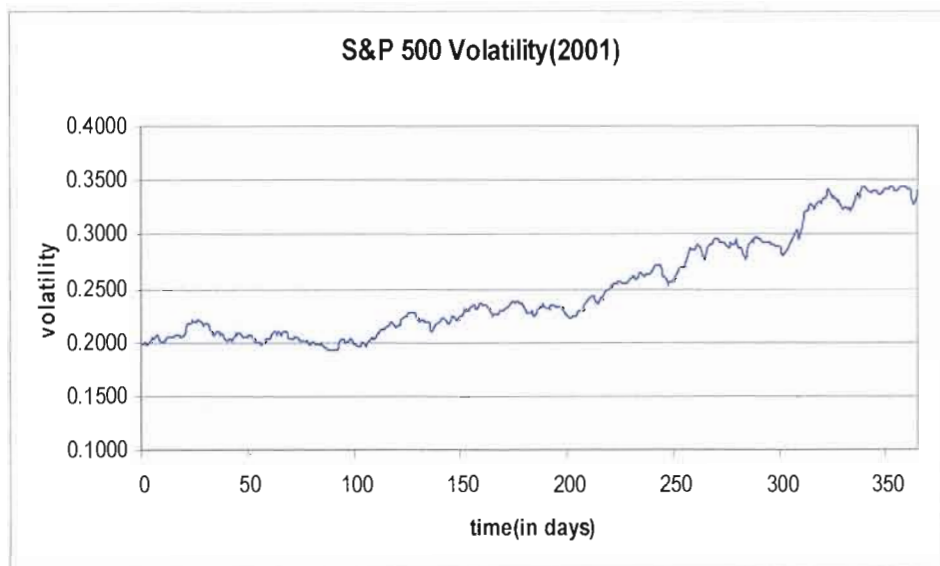


Figure 3.3 La volatilité du S&P 500 pour l'année 2001.

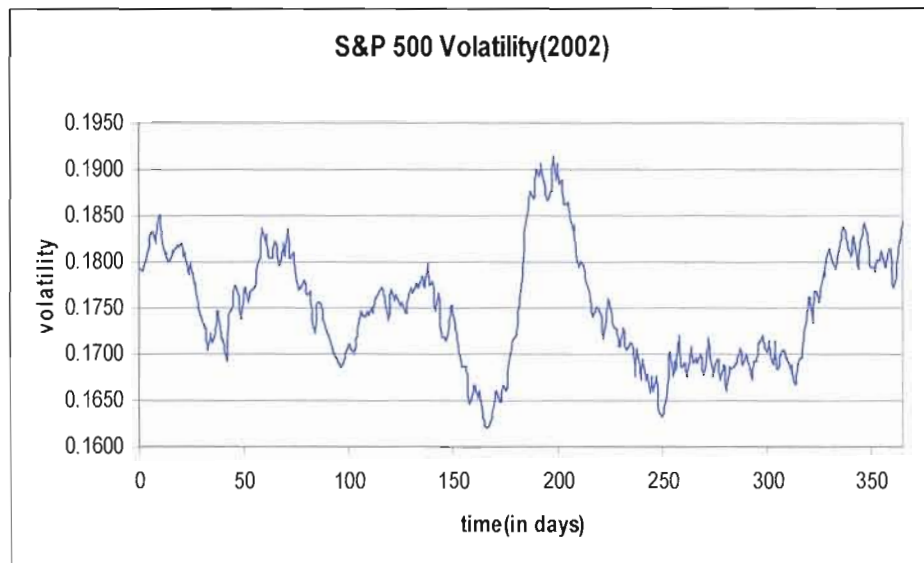


Figure 3.4 La volatilité du S&P 500 pour l'année 2002.

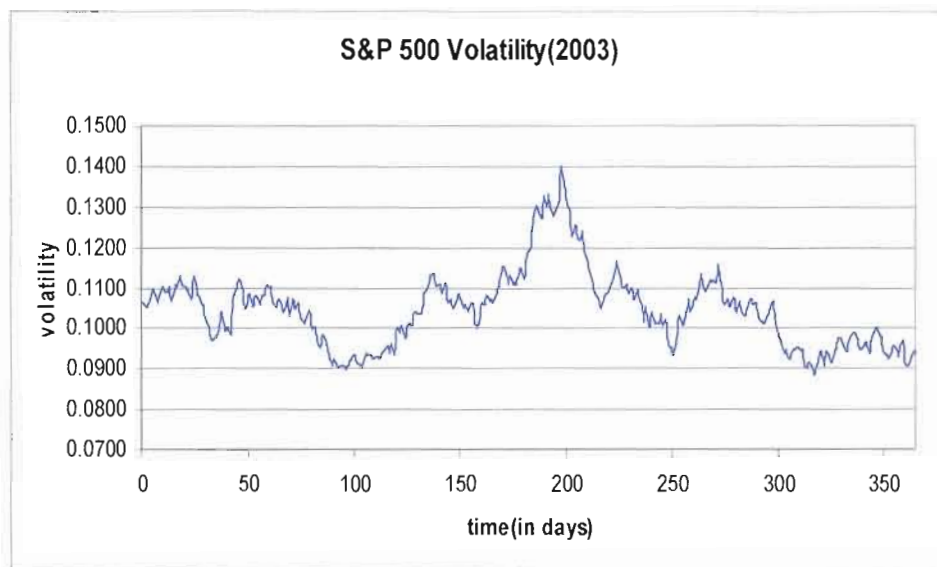


Figure 3.5 La volatilité du S&P 500 pour l'année 2003.

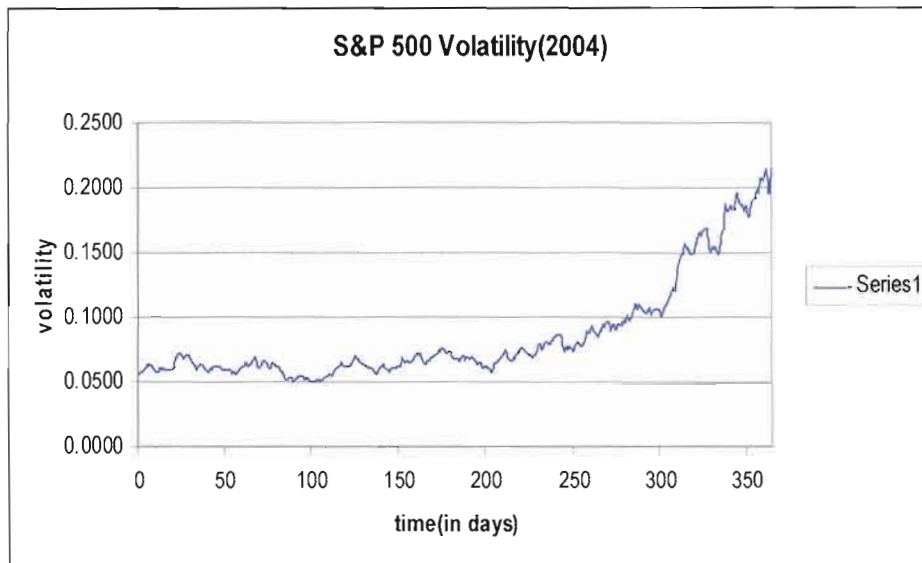


Figure 3.6 La volatilité du S&P 500 pour l'année 2004.

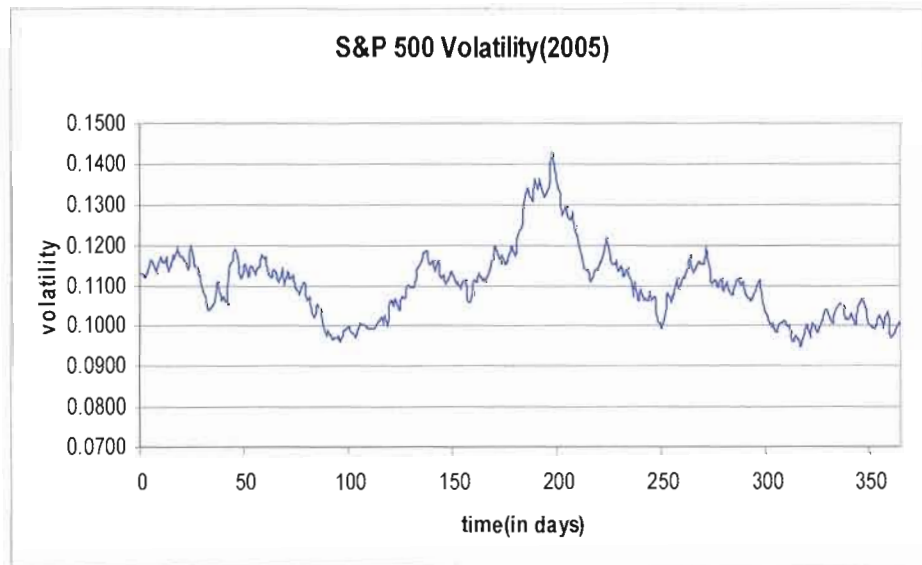


Figure 3.7 La volatilité du S&P 500 pour l'année 2005.

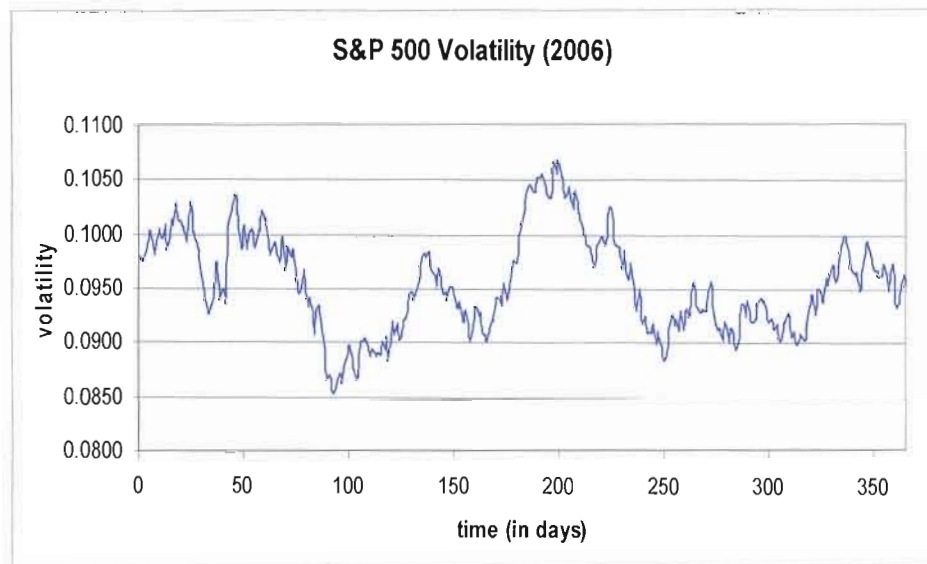


Figure 3.8 La volatilité du S&P 500 pour l'année 2006.

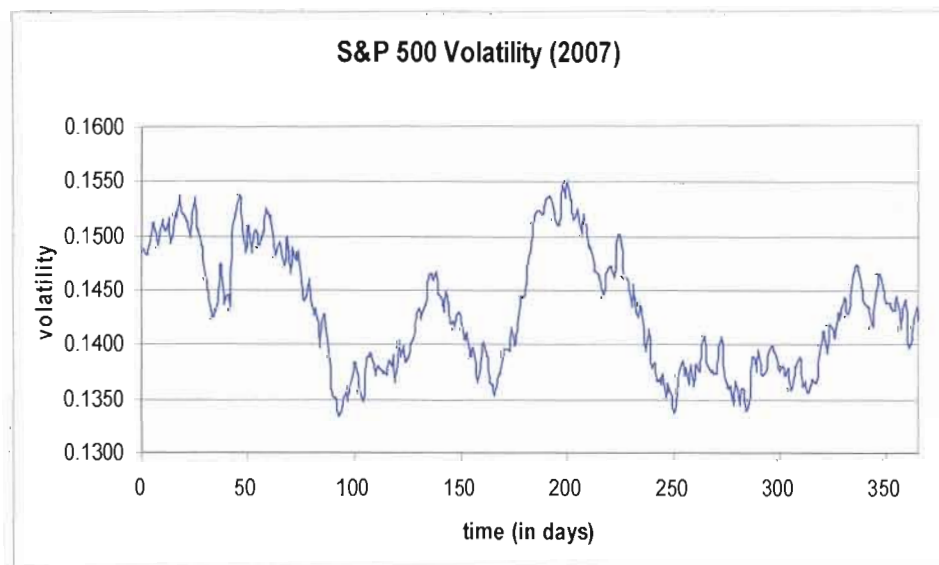


Figure 3.9 La volatilité du S&P 500 pour l'année 2007.

VALIDITÉ DU MODÈLE

Dans cette section, nous cherchons à valider le modèle selon trois phases :

- une phase de comparaison dans laquelle on compare les résultats obtenus dans la section précédente avec les données observées sur le marché.
- une phase de validation qui permet de valider le modèle sur de nouvelles observations.
- une phase d'application une fois que la validation est jugée satisfaisante.

CHAPITRE IV

LA VOLATILITÉ RÉALISÉE VS HESTON

4.1 La volatilité réalisée du S&P 500

L'idée de volatilité réalisée est initialement proposée par French, Schwert et Stambaugh (1987). Il s'agit d'une approche alternative pour l'estimation de la volatilité en utilisant des données de plus haute fréquence pour calculer la volatilité des rendements à plus basse fréquence. Depuis la dernière décennie, la disponibilité des données intrajournalières crée un intérêt pour cette approche. Andersen et Bollerslev (1997) sont les premiers à proposer d'utiliser des données de haute fréquence pour estimer la volatilité réalisée quotidienne d'un actif. La volatilité ainsi calculée n'est pas latente comme dans les modèles GARCH, mais observée. L'estimation des volatilités réalisées exige beaucoup de soin en raison des caractéristiques inhérentes aux transactions des investisseurs institutionnels qui sont contenues dans les données de haute fréquence.

Taylor et Xu (1997) ainsi qu'Andersen et Bollerslev (1997) montrent que la volatilité journalière réalisée peut être construite en additionnant les rendements intrajournaliers au carré. En utilisant les propriétés des logarithmes, nous avons:

$$R_t^J = \sum_{i=1}^N R_{t,i}^2 \quad (4.1)$$

Nous supposons ici qu'un jour peut être divisé en N intervalles de temps équivalents. Le terme $R_{t,i}$ représente le rendement réalisé à l'intervalle i du jour t . La variance réalisée quoditienne est donnée par:

$$Var(R_t^j | I_{t-1}) = \sum_{i=1}^N Var(R_{t,i} | I_{t-1}) + 2 \sum_{i < j} Cov[(R_{t,i}, R_{t,j}) | I_{t-1}] \quad (4.2)$$

Si la série des rendements $R_{t,i}$ est un processus de bruit blanc, alors les rendements ne sont pas autocorrélés et nous avons:

$$Var(R_t^j | I_{t-1}) = N Var(R_{t,1}) \quad (4.3)$$

Le terme $Var(R_{t,1})$ est estimé par :

$$\hat{\sigma}_{t,j}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (R_{t,i} - \bar{R}_t)^2}{N-1} \quad (4.4)$$

où \bar{R}_t est la moyenne des rendements intrajournaliers. Elle est nulle puisque la période d'observation est très courte. Ainsi,

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{N}{N-1} \sum_{i=1}^N R_{t,i}^2 \quad (4.5)$$

La volatilité réalisée pourrait être aussi calculée simplement comme les déviations des rendements quotidiens par rapport à leur moyenne, selon l'équation (4.6):

$$\sigma_{t,T} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (r_i - \bar{r})^2} \quad \text{où} \quad \bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_i \quad (4.6)$$

où r_i sont les rendements quotidiens ; $i = 1, \dots, 252$ (on considère qu'il y a 252 jours ouvrables durant l'année).

Le tableau 4.1 montre la volatilité réalisée annualisée de l'indice S&P500 pour les années 2000 à 2007¹³, et qui est représentée à la figure 4.1.

Tableau 4.1
Volatilité réalisée du S&P 500

Année	Volatilité réalisée annuelle du S&P 500
2000	22.24 %
2001	21.40 %
2002	25.97 %
2003	16.78 %
2004	11.10 %
2005	10.25 %
2006	9.91 %
2007	15.11 %

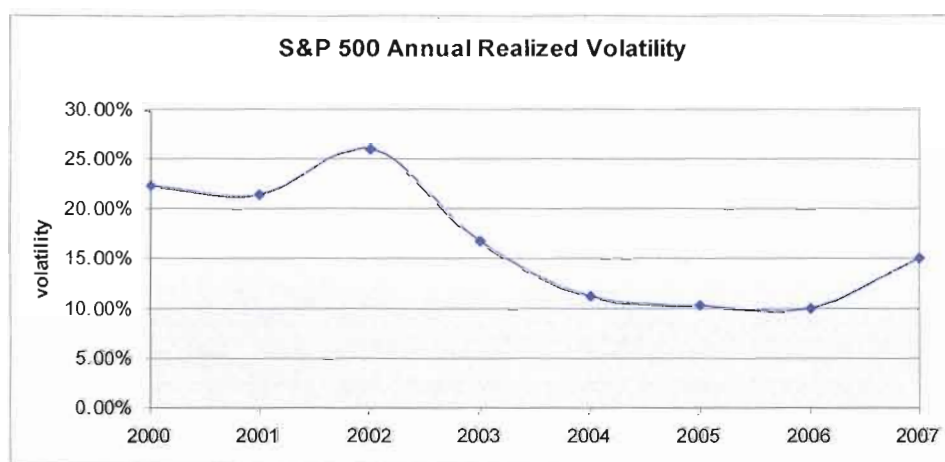


Figure 4.1 Volatilité réalisée annuelle du S&P 500.

¹³ Les formules utilisées pour les calculs ainsi que les chiffres Excel se trouvent à l'annexe 3.

4.2 Comparaison avec le modèle de Heston

Dans cette section, on compare les résultats obtenus par la méthode de la volatilité réalisée avec ceux obtenus par le modèle de Heston. Or, dans notre cas, il fallait trouver la volatilité annuelle estimée par Heston que nous avons considérée comme la moyenne des volatilités quotidiennes annualisée selon l'équation (4.7):

$$\sigma_{\text{annuelle_Heston}} = \left(\frac{1}{N} \sum \sigma_{\text{quotidienne_heston}} \right) \times \sqrt{252} \quad (4.7)$$

Le tableau 4.2 montre la volatilité annuelle de Heston, comparée à la volatilité réalisée de l'indice S&P 500 de l'année 2000 à 2007.

Tableau 4.2
La différence entre la volatilité réalisée et celle de Heston

Année	Volatilité réalisée annuelle du S&P 500	Volatilité par Heston	Écart absolu $ V_{\text{réalisée}} - V_{\text{Heston}} $
2000	22.24%	22.53%	0.29%
2001	21.40%	24.87%	3.47%
2002	25.97%	17.50%	8.47%
2003	16.78%	10.45%	6.33%
2004	11.10%	8.59%	2.51%
2005	10.25%	11.02%	0.77%
2006	9.91%	9.55%	0.36%
2007	15.11%	14.31%	0.8%

En comparant les valeurs des deux colonnes de volatilité au tableau 4, on remarque que l'écart absolu entre les deux volatilités n'est pas considérable, allant de 0.29% en 2000 à 8.47% en 2003. Ce qui montre que le modèle de Heston (1993) génère des volatilités dont les valeurs sont légèrement différentes de celles générées par la méthode de volatilité réalisée sur l'horizon d'étude de 2000 à 2007.

La figure 4.2 représente la différence entre la volatilité estimée et la volatilité réalisée.

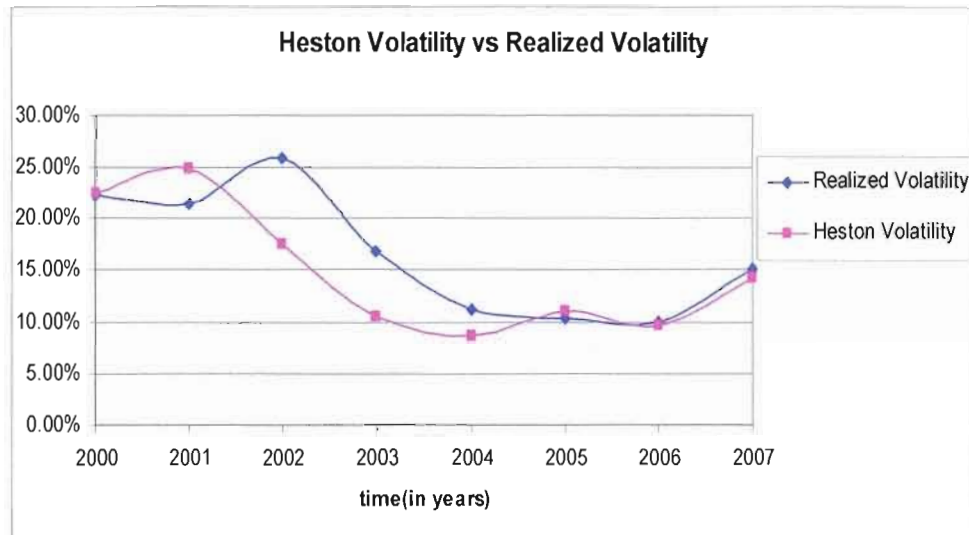


Figure 4.2 Volatilité réalisée du S&P 500 Vs Volatilité de Heston.

En regardant cette figure, il nous semble que la volatilité de Heston semble prédire la volatilité réalisée, c'est-à-dire qu'elle la précède dans le temps. On pourrait alors utiliser le modèle de Heston comme outil de prévision de la volatilité qui se réalisera environ dans un an. En effet, le sommet de la courbe représentant la volatilité de Heston est décalé d'un an ou moins¹⁴ de l'autre sommet de la courbe qui illustre la volatilité réalisée de l'indice S&P 500. Cette technique nous rappelle la moyenne mobile (Moving average) lors de l'analyse technique des graphiques des cours boursiers.

¹⁴ Une explication possible peut remonter au fait que les données sont annualisées et l'agrégation peut jouer.

4.3 Validation et application du modèle

Comme on a pu le constater à la section précédente, la différence entre la volatilité estimée par le modèle de Heston et la volatilité réalisée est peu significative. À partir de ce constat, on peut affirmer que le modèle de Heston adapté pour générer la volatilité est valide en tant que modèle d'estimation de la volatilité de l'indice S&P500 et partant, d'autres indices boursiers similaires et actions sous-jacentes. À partir de là, on est en mesure d'appliquer ce modèle pour prévoir la volatilité future de l'indice S&P500. Tout ce dont on a besoin, c'est d'un ensemble de prix d'options de la plus récente journée pour estimer les paramètres et générer par la suite la volatilité, à l'aide des deux équations du modèle, pour l'année à venir.

La figure 4.3 montre la volatilité estimée pour l'année 2008 basée sur des options se transigeant la journée même et échéant en mars 2008.

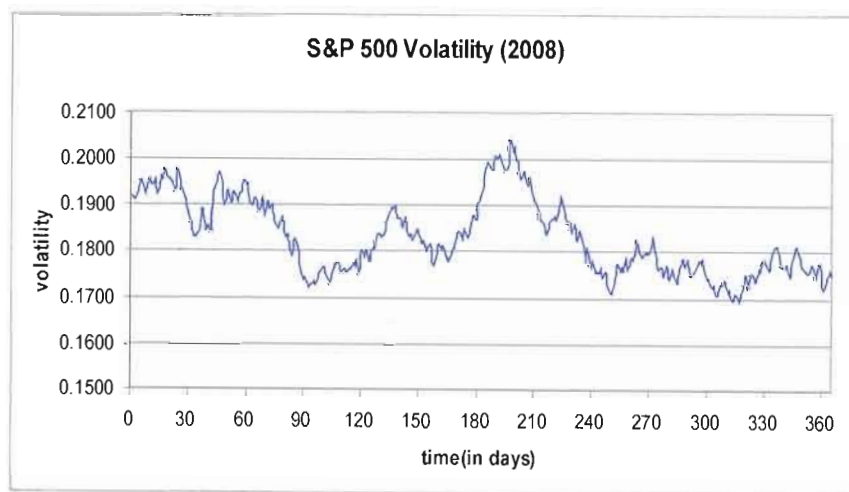


Figure 4.3 La volatilité du S&P 500 pour l'année 2008.

Average Volatility per year	high	low
18.30 %	20.44 %	16.93 %

La volatilité est supposée alors augmenter pour l'année 2008 selon le modèle de Heston. Le défi est alors de maintenir sa validité et réussir son estimation pour l'année à venir.

CONCLUSION

Dans ce travail nous avons présenté le modèle de Heston et nous l'avons utilisé pour estimer la volatilité de l'indice S&P500. La première étape consistait à estimer les paramètres du modèle et à reconstruire une volatilité historique de l'année 2000 à 2006. Le programme VBA utilisé pour générer la volatilité est présenté en annexe. Puis nous avons comparé cette volatilité générée avec la volatilité réalisée pour déterminer si le modèle est capable de capter les dynamiques de la volatilité implicite de l'indice. Les résultats obtenus montrent que la différence entre la volatilité réalisée et celle générée par le modèle de Heston n'est pas très importante et que le modèle de Heston est capable de prévoir la volatilité de l'indice S&P 500. À noter que les résultats dépendent de la quantité des options sélectionnées et de la largeur de l'intervalle des prix d'options disponibles.

La seconde étape consistait à valider le modèle pour la prévision de la volatilité de l'indice dans les années à venir. On peut voir pour l'année 2007 que le modèle a réussi à estimer une volatilité très proche de celle réellement réalisée avec un écart d'erreur de 0.8%, ce qui semble valider le modèle comme moyen d'estimer la volatilité de l'indice S&P 500.

Enfin, la limite pratique de ce modèle était la difficulté d'estimer les paramètres, en particulier celui de la volatilité stochastique puisque les options disponibles sont rares et que le modèle doit être calibré. Une autre dimension était la stabilité des paramètres estimés. Il sera intéressant de calibrer le modèle pour des périodes de stabilité et pour des périodes de crise, comme l'explosion de la bulle Internet qui a eu lieu à la fin des années 1990 par exemple, pour voir la différence et obtenir plus de précision.

APPENDICES

APPENDICE A

ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE HESTON

A.1 Le Code VBA¹⁵ utilisé pour estimer les paramètres de Heston selon les trois méthodes de « Loss functions »

Root MSE Loss Function:

```
Function RMSEparams(startParams, PC, S, K, r, q, t, realPrice)
```

```
    RMSEparams = NelderMead("RMSE", startParams, PC, S, K, r, q, t, realPrice)
```

```
End Function
```

Root MSE Parameter Estimates

```
Function RMSE(startParams, PC, S, K, r, q, t, realPrice)
```

```
    rho = startParams(1)
```

```
    kappa = startParams(2)
```

```
    thet = startParams(3)
```

```
    SigmaV = startParams(4)
```

```
    V0 = startParams(5)
```

```
    ki = startParams(6)
```

```
    gam = startParams(7)
```

```
    n = Application.Count(K)
```

```
    If (V0 < 0) Or (kappa < 0) Or (thet < 0) Or (Abs(rho) > 1) Or (gam > 1) Or ((gam * (1 - gam) * SigmaV ^ 2 - thet ^ 2) > 0) Then
```

```
        RMSE = 9999999
```

```
    Else
```

```
        RMSE = 0
```

```
        For i = 1 To n
```

¹⁵ Source: Rouah Douglas Fabrice, and Gregory Vanberg, 2007, "Option Pricing Models & Volatility Using Excel-VBA", chapitre 9.

```

    If (PC(i) = "Call") Then
      RMSE = RMSE + ((realPrice(i) - HCTrans(S, K(i), r, q, V0, t, ki, thet, kappa, SigmaV, rho, gam, "Call")) ^ 2
    Else
      RMSE = RMSE + ((realPrice(i) - HCTrans(S, K(i), r, q, V0, t, ki, thet, kappa, SigmaV, rho, gam, "Put")) ^ 2
    End If
  Next i
End If
RMSE = Sqr(RMSE / n)
End Function

Function PERRMSEparams(startParams, PC, S, K, r, q, t, realPrice)
  PERRMSEparams = NelderMead("PERRMSE", startParams, PC, S, K, r, q, t, realPrice)
End Function

' Percent Root MSE Parameter Estimates
Function PERRMSE(startParams, PC, S, K, r, q, t, realPrice)
  rho = startParams(1)
  kappa = startParams(2)
  thet = startParams(3)
  SigmaV = startParams(4)
  V0 = startParams(5)
  ki = startParams(6)
  gam = startParams(7)
  n = Application.Count(K)
  If (V0 < 0) Or (kappa < 0) Or (thet < 0) Or (Abs(rho) > 1) Or (gam > 1) Or ((gam * (1 - gam) * SigmaV ^ 2 - thet ^ 2) > 0) Then
    PERRMSE = 9999999
  Else

```



```

PERRMSE = 0

For i = 1 To n

If (PC(i) = "Call") Then

    PERRMSE = PERRMSE + ((realPrice(i) - HCTrans(S, K(i), r, q, V0, t, ki, thet, kappa, SigmaV, rho, gam,
"Call")) / realPrice(i)) ^ 2

Else

    PERRMSE = PERRMSE + ((realPrice(i) - HCTrans(S, K(i), r, q, V0, t, ki, thet, kappa, SigmaV, rho, gam,
"Put")) / realPrice(i)) ^ 2

End If

Next i

End If

PERRMSE = Sqr(PERRMSE / n)

End Function

```

Implied Volatility Root MSE Loss Function

```

Function IVRMSEparams(startParams, PC, S, K, r, q, t, realIV)

    IVRMSEparams = NelderMead("IVRMSE", startParams, PC, S, K, r, q, t, realIV)

End Function

```

' Implied Volatility Root MSE Parameter Estimates

```

Function IVRMSE(startParams, PC, S, K, r, q, t, realIV)

rho = startParams(1)

kappa = startParams(2)

thet = startParams(3)

SigmaV = startParams(4)

V0 = startParams(5)

```

```

ki = startParams(6)

gam = startParams(7)

n = Application.Count(K)

If (V0 < 0) Or (kappa < 0) Or (thet < 0) Or (Abs(rho) > 1) Or (gam > 1) Or ((gam * (1 - gam) * SigmaV ^ 2 - thet ^
2) > 0) Then

    IVRMSE = 9999999

Else

    IVRMSE = 0

For i = 1 To n

    If (PC(i) = "Call") Then

        curPrice = HCTrans(S, K(i), r, q, V0, t, ki, thet, kappa, SigmaV, rho, gam, "Call")

        IVRMSE = IVRMSE + (reallV(i) - BisecBSV("Call", S, K(i), r, t, 0.000001, 4, curPrice)) ^ 2

    Else

        curPrice = HCTrans(S, K(i), r, q, V0, t, ki, thet, kappa, SigmaV, rho, gam, "Put")

        IVRMSE = IVRMSE + (reallV(i) - BisecBSV("Put", S, K(i), r, t, 0.000001, 4, curPrice)) ^ 2

    End If

Next i

End If

IVRMSE = Sqr(IVRMSE / n)

End Function

```

A.2 Prototype du chiffrier Excel utilisé pour les estimations des paramètres de Heston selon les trois méthodes et pour chaque année. On se contente de présenter les données relatives à l'année 2007 qui comprennent les prix des call et des put écrits sur l'indice S&P500 le 16 novembre 2007 et échéant le troisième vendredi du mois d'échéance, soit décembre 2007.

S&P500

Date courante 16-Nov-07

Taux d'intérêt sans
risque 0.0322¹⁶

Date d'échéance 21-Dec-07

Temps jusqu'à
échéance (*T*) 0.0959Prix Spot (*S*) 1458.74

Type de L'option	Prix d'exercice (<i>K</i>)	Moneyness (<i>K/S</i>)	Prix
Put	850	0.58	0.05
Put	900	0.62	0.2
Put	950	0.65	0.1
Put	1000	0.69	0.4
Put	1190	0.82	2.6
Put	1200	0.82	2.5
Put	1300	0.89	11
Put	1325	0.91	10.9
Put	1350	0.93	21.6
Put	1375	0.94	20.6
Put	1475	1.01	57.3
Call	1550	1.06	8
Call	1575	1.08	1.8
Call	1575	1.08	112.4
Call	1575	1.08	5.3
Call	1600	1.10	2.15
Call	1600	1.10	0.6
Call	1625	1.11	0.3
Call	1625	1.11	151.5
Call	1640	1.12	0.3
Call	1650	1.13	0.15
Call	1650	1.13	0.05
Call	1675	1.15	0.05
Call	1700	1.17	0.05
Call	1700	1.17	251
Call	1725	1.18	0.1
Call	1750	1.20	0.1
Call	1775	1.22	0.9
Call	1800	1.23	0.05

¹⁶ www.federalreserve.gov/releases/H15/data.htm

Les Valeurs de départ

Loss Function	0
Rho (ρ)	-0.5
Kappa (κ)	0.1
Thêta (θ)	0.2
Volatilité de la variance (σ)	0.1
Variance (V_0)	0.2
Partie imaginaire de k (k_i)	0.5
Gamma (γ)	0.1

Les Paramètres estimés de Heston (1993) selon la méthode \$RMSE en 2007

Loss Function	0.2416
Rho (ρ)	-0.5388
Kappa (κ)	0.1042
Thêta (θ)	0.2141
Volatilité de la variance (σ)	0.1001
Variance (V_0)	0.1352

Les Paramètres estimés de Heston (1993) selon la méthode %RMSE en 2007

Loss Function	0.7852
Rho (ρ)	-0.6927
Kappa (κ)	0.1196
Thêta (θ)	0.1951
Volatilité de la variance (σ)	0.1051
Variance (V_0)	0.0256

Les Paramètres estimés de Heston (1993) selon la méthode ivRMSE en 2007

Loss Function	0.2513
Rho (ρ)	-0.4663
Kappa (κ)	0.1417
Thêta (θ)	0.1906
Volatilité de la variance (σ)	0.0170
Variance (V_0)	0.0247

APPENDICE B

SIMULATION DE LA TRAJECTOIRE DE LA VOLATILITÉ DE HESTON

B.1 Le code VBA que nous avons écrit pour simuler la trajectoire de la volatilité selon les équations (3.1) et (3.2) :

```
' Heston volatility by Monte Carlo Simulation
Sub HestonMC()
Dim kappa, theta, lambda, rho, sigmav, daynum, startS, r, startv, ITER
Dim allV() As Double
kappa = Range("kappa")
theta = Range("theta")
lambda = Range("lambda")
rho = Range("rho")
sigmav = Range("sigmaV")
startS = Range("S")
r = Range("rf")
startv = Range("V")
ITER = Range("Iter")
daynum = Range("dtm")

ReDim allV(daynum) As Double
deltat = (1 / 365)
'first iteration itcount = 1
Invt = Log(startv)
```

```

curv = startv
For daycnt = 1 To daynum
    e = Application.NormSInv(Rnd)
    eS = Application.NormSInv(Rnd)
    ev = rho * eS + Sqr(1 - rho ^ 2) * e
    'update the stock volatility for first iteration
    Invt = Invt + (kappa * (theta - curv) - lambda * curv - 0.5 * (sigmav ^ 2)) * deltat + sigmav * (1 /
Sqr(curv)) * Sqr(deltat) * ev
test = Exp(Invt)
    If test = 0 Then GoTo I1
    curv = Exp(Invt)
I1:    allV(daycnt) = Exp(Invt)
Next daycnt

For itcount = 2 To ITER
    Invt = Log(startv)
    curv = startv
    For daycnt = 1 To daynum
        e = Application.NormSInv(Rnd)
        eS = Application.NormSInv(Rnd)
        ev = rho * eS + Sqr(1 - rho ^ 2) * e
        'update the stock volatility
        Invt = Invt + (kappa * (theta - curv) - lambda * curv - 0.5 * (sigmav ^ 2)) * deltat + sigmav * (1 /
Sqr(curv)) * Sqr(deltat) * ev
        test = Exp(Invt)
        If test = 0 Then GoTo I2
        curv = Exp(Invt)
I2:    allV(daycnt) = (allV(daycnt) + Exp(Invt)) / 2
    Next daycnt
Next itcount

```

```

For daycnt = 1 To daynum
'Range("day").Offset(daycnt, 0) = daycnt
Range("output").Offset(daycnt, 0) = Sqr(allV(daycnt))
Next daycnt
End Sub

```

B.2 Prototype du chiffrier Excel utilisé pour les estimations de la volatilité de Heston pour chaque année. On se contente de présenter les données relatives à l'année 2007. (Idem pour les autres années). Les paramètres utilisés pour la simulation de Monte Carlo sont estimés comme c'est démontré en Annexe 1. Ces paramètres sont injectés dans les équations (3.1) et (3.2) pour simuler la trajectoire de la volatilité.

Volatilité de Heston (1993)

Année 2007			
Prix spot (S)	1458.74	jour	Volatilité
		1	0.1487
Taux sans risque (rf)	0.0322	2	0.1482
Temps à échéance ($T - t$)	365	3	0.1482
Rho (ρ)	-0.5388	4	0.1499
Kappa (κ)	0.1042	5	0.1508
Theta (θ)	0.2141	6	0.1512
Lambda (λ)	0	7	0.1496
Volatilité de la Variance			
(σ)	0.1001	8	0.1489
Variance (v)	0.0228	9	0.1500
Nombre de simulations	1000	10	0.1515
		11	0.1505
Paramètres estimés par \$RMSE		12	0.1515
Rho (ρ)	-0.5388	13	0.1517
Kappa (κ)	0.1042	14	0.1492
Theta (θ)	0.2141	15	0.1508
Volatilité de la Variance (σ)	0.1001	16	0.1522
Volatilité de départ (2007)	0.1511	17	0.1516
		18	0.1537
		19	0.1522
		20	0.1519

21	0.1513
22	0.1514
23	0.1498
24	0.1513
25	0.1536
26	0.1507
27	0.1506
28	0.1491
29	0.1487
30	0.1470

.....

Volatilité moyenne annualisée	Maximum	Minimum
0.1431	0.1552	0.1335
14.31 %	15.52 %	13.35 %

B.3 Le tableau ci-dessous représente la volatilité de l'indice S&P 500 obtenues par le modèle de Heston pour les années 2000 à 2007. En effet, la volatilité moyenne par année a été calculée à partir des volatilités quotidiennes générées par le modèle.

Tableau B.1
La volatilité annuelle de Heston

Année	Volatilité par Heston
2007	14.31 %
2006	9.55 %
2005	11.02 %
2004	8.59%
2003	10.45 %
2002	17.50 %
2001	24.87 %
2000	22.53 %

APPENDICE C

LA VOLATILITÉ RÉALISÉE DE L'INDICE S&P 500

C.1 Prototype du chiffrier Excel utilisé pour les calculs de la volatilité réalisée de l'indice S&P500 pour les années 2000 à 2007. On se contente de présenter les données relatives à l'année 2007. (Idem. pour les autres années)

Volatilité réalisée du S&P500			2007
Date	S&P500	Rendements	
t	St	$R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$	R_t^2
9-Nov-07	1,453.70		
8-Nov-07	1,474.77	0.0145	0.000210
7-Nov-07	1,475.62	0.0006	0.000000
6-Nov-07	1,520.27	0.0303	0.000916
5-Nov-07	1,502.17	-0.0119	0.000142
2-Nov-07	1,509.65	0.0050	0.000025
1-Nov-07	1,508.44	-0.0008	0.000001
31-Oct-07	1,549.38	0.0271	0.000737
30-Oct-07	1,531.02	-0.0118	0.000140
29-Oct-07	1,540.98	0.0065	0.000042
26-Oct-07	1,535.28	-0.0037	0.000014
25-Oct-07	1,514.40	-0.0136	0.000185
24-Oct-07	1,515.88	0.0010	0.000001
23-Oct-07	1,519.59	0.0024	0.000006
22-Oct-07	1,506.33	-0.0087	0.000076
.....		
Volatilité réalisée			
$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_i R_i^2$			
Variance	Volatilité	Volatilité annualisée	
0.000091	0.009518802	0.151106	
		15.11 %	

BIBLIOGRAPHIE

Andersen, T.G. and T. Bollerslev, (1997), Intraday periodicity and volatility persistence in financial markets, *Journal of Empirical Finance*, Vol. 4, Issues 2-3, pp 69-293.

Black, F. and M. Sholes, (1973), The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp.637- 659.

Britten-Jones M., and A. Neuberger, (2000), Option Prices, Implied Price Processes, and Stochastic Volatility, *Journal of Finance*, Vol.55, No.2, pp.839- 866.

Carr P., and L. Wu, (2006), A Tale of Two Indices, *The Journal of Derivatives*, No. Spring, pp. 13- 29.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S. A. Ross, (1985), A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, Vol. 53, pp. 385- 402.

Dupire B., (2004), Pricing with a smile, *Risk*, Vol.7, No.1, pp. 18- 20.

French, K.R., G.W. Schwert and R.F. Stambaugh, (1987), Expected Stock Returns and Volatility, *Journal of Financial Economics*, Vol. 19, pp.3- 29.

Heston, S.L., (1993), A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, Vol.6, No 2, pp. 327- 343.

Jacod J., (2006), Estimation de la volatilité et problèmes connexes, Université Paris VI, France.

Jiang G.J., and Y.S. Tian, (2005), The Model-Free Implied Volatility and Its Information Content, *Review of Financial studies*, Vol. 18, No.4, pp. 1305- 1342.

Khoury N. et J. Ganon, (2005), Les régimes de rémunération à base d'options aux dirigeants : charge comptable et régie d'entreprise, cahier de recherche, pp. 9- 10.

Merton, R., (1973), The Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4 No. Spring, pp.141- 183.

Racicot F.-É., et R. Théoret, (2005), Calibrage économétrique de processus stochastiques avec applications aux données boursières, bancaires et cambiales canadiennes, Working Paper No UQO-DSA-wp0292005.

Racicot F.-É., et R. Théoret, (2004), Le Calcul Numérique en Finance Empirique et Quantitative, Ingénierie financière et Excel (Visual Basic), 2^e édition, Presses de l'Université du Québec.

Racicot F.-É., et R. Théoret, (2005), Quelques Applications du filtre de Kalman en Finance: Estimation et prévision de la volatilité stochastique et du rapport cours bénéfices, Working Paper No UQO-DSA-wp0312005.

Rouah Douglas F., and G. Vanberg, (2007), Option Pricing Models & Volatility Using Excel-VBA, Wiley Finance edition.

Taylor, S.J. and X. Xu, (1997), The Incremental Volatility Information in One Million Foreign Exchange Quotations, *Journal of Empirical Finance*, Vol.4, pp.317-340.

Théoret R., P. Rostan, and A. El-Moussadek, (2006), An Essay on Stochastic Volatility and the Yield Curve, *Advances in Risk Management*, chapter 5.

The CBOE - Micro Site, (2004), VIX CBOE VOLATILITY INDEX, White Paper, www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf.